正規族函數論及其應用

楊重駿

【本文提要】

正規族（Normal Families）函數論早在古典解析函數論研究發展中就佔有重要地位。尤其在一些存在性定理的證明方面，例如爲衆所知的黎曼映射定理（Riemann Mapping Theorem）。

在本文中，我們對正規函數族的定義及有關的預備定理、性質、充分性條件，及其一些最近在研究值分布理論（Value distribution theory）、研究方面，特別是複動力系統（Complex dynamics）作出介紹及證明。值得一提的是自 1975 年後，開始有人如查克曼（Zalcman）等對一個解析函數族不爲正規函數族作出了一些充要的條件，視發現這些條件在解決微分多項式的值分布，及代數微分方程（Algebraic Differential Equations）亞純函數解（Meromorphic function soflution）的增長，有意想不到的功效。在這篇論文中所介紹的結果，有些是筆者及其他研究生或研究者的最新研究成果。

1.導言

分析學可以說主要是研究函數的極限、收歛、發散、微分、積分等相關概念的數學，而一般視函數的定義域（Domain of definition）及其值域（range）可分爲實分析（Real Analysis）及複分析（Complex Analysis），前者是指所討論的函數的定義域及值域都在實數域上，而後者是指都在複數域上的情形。

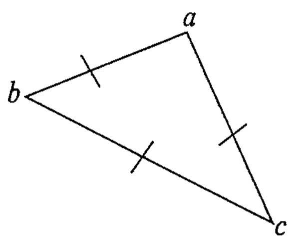
由於實數域在具直覺及視覺性的歐氏距離（Ecludiean distance）下，實數域的值可以與一條具某一定點與 0 值相應的直線一一相對應。所以實數域的許多基本性質往往很容易從一直線的連綿性而得到瞭解。譬如一個有界的實數集A必有最大下限及最小上限。但要注意的是當我們稱點集A有一最大上限或最小下限時，並不能確定此上限或下限是否屬於此集合 A？譬如拿開區間（0,1）來看，0 與 1 分別是此點集的最大下限及最小上限，但 0 與 1 都不屬於此區間，但如考慮任何一個閉區間$[a,b]$，則a與b分別爲此點集的

最大下限及最小上限且同屬於所討論的區間$[a,b]$。一般一個有界的閉實數集，我們特稱之爲緻密集（compact set），實數域另外一個重要的性質就是：

P1：任何一個有界的無窮點集，必至有一聚集點。我們稱點c是某點集的聚集點是指說以c點爲中心，取任意大小的（但非零）半徑d的區間即$(c-d,c+d)$內，必包含至少一個與c不同，但屬於點集A的點。

如果把直線實數，抽象化爲空間（space）及點（point）來看待，這樣我們再把某類函數簇中的每一函數看作一個點，函數簇形成一個空間，這樣再配合定出兩個函數的距離，如果此一距離滿足度量空間（即所謂歐氏空間）的性質（簡單的說就是滿足以下三個條件：

1. 兩點間的距離爲 0，爲當且只有當此兩點重合時。
2. 對稱性：即點 a 到點 b 的距離與點 b 到點 a 距離相等。
3. 三角形不等式：取任意三點，其中任意兩點的距離必小於此兩點分別第三點的距離之和。



我們就可以把實數域中主要由距離定出的極限、收斂、發散、連續、微分、積分等概念用來對由函數構成的度量空間上作相應的探討，而這裡我們特別要介紹的是與 P1 相應的結果。

P2：一個由連續實函數構成的函數簇爲緻密的充要條件是此函數簇爲等度連續的（equicontinuous）及均勻有界的（uniformly bounded）。

此一結果是集合三位義大利數學家Ascoli，Arzela及Vitali的努力及成果。當初Arzela並曾嚐試用*P2*來證明有名及有用的狄里西雷原理（Dirichlet principle）。

孟台爾（Montel）是最早把有關 *P2* 的性質用來研究正則（或解析）函數（Analytic function）族，定出了所謂的正規函數簇的定義，及導出了一些成爲正規族的條件。

在此文中我們將對正規函數族的定義及有關的預備定理，及充分性條件及其一些重要的應用等作出介紹及證明。特別是在複動力系統（complex dynamics）研究方面的一些新應用及結果作介紹。有趣的是自 1975 年後，開始有人（如查克曼Zalcman等）對一個

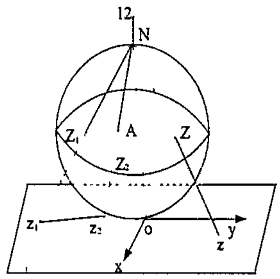
複函數族不爲正規函數族作出了一些充要性的條件。現這些條件被用來解決一些值分布論（Value distribution theory）中的問題及一些代數微分方程亞純函數解（Meromorphic solutions）或整函數解（entire solutions）的增長問題。在這方面值得一提的是一些有關扁列夫（Painleve）型微分方程解的增長估計結果。

2.正規性的檢驗規則及一些古典的應用

2.1 複平面球面及複函數空間

今以C表由所有複重數 z 所構成的複平面，即$C=\{z|z|<\infty$；其中$|z|$表 z 的模或與原點 0 的距離$\}$。$\overline{C}$表C加上概念上的無窮遠點∞，即$\overline{C}=C\cup\infty$並爲通常所稱的擴充複平面。

今考慮一個半徑爲$\frac{1}{2}$，中心$A=(0，0，\frac{1}{2})$的球面S：$x^2+y^2+(\mu-\frac{1}{2})2=1$，參看下圖。



特別S上點$N=(0,0,1)$稱爲北極（pole）。同時$x-y$平面就是複平面，其與球面S相切于原點$(0,0,0)$對複平面上任一點$z=x+iy$與北極點N相連的直線與球面S有唯一的交點Z，這種對應就是所謂的球極平面投影（stereographic projection）。S又稱爲黎曼球面。很易見這樣定出的投影是個拓撲映照（Topological mapping）。而如將點∞與N點相應，則此種映照將擴充平面上的點，與黎曼球面上的點一一對應起來。因而擴充平面就如同S一樣爲一個閉的及緊緻的空間。這時我們可以把擴充平面上兩點的距離用它們在球面S上相應兩點的直線距離來看待，也即所謂的弦距（chordal diatance）d來度量，這時我們由$|z_1-z_2|$表兩點在複平面的直線距離；由簡單的幾何相似關係，可得相應的弦矩（或球面距離）如下：

$$d(z_1,z_2)=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}，z_1,z_2\in C$$

$$d(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

注意在弦距下擴充複平面中，點∞與一般在複平面上的點無什麼不同了。我們也可

以度量∞點與另一點z的距離，因此我們也可用平常心來討論取∞值的複函數了。

$$(\mathrm{ii})f^{\#}(z)=\lim_{h\to 0}\frac{d(f(3th),f(z))}{h}=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}(f(z)\neq\infty)$$

就是所謂的球導數，有時以$\partial(z,f(z))$表之，並注意$f^{\#}=(\frac{1}{f})^{\#}$！

2.2 均勻收斂、等度、連續，及正規族函數

記號: 設D爲C中一區域（Domain）通常是一連通域，以下用$F(D)$表所有在D上除了可列點爲極點外爲解析的亞純函數集合。

定義2.1 設$A(D)$爲$F(D)$的一子集我們稱$A(D)$爲正規的是指對任一$A(D)$中的序列$\{f_n\}$，總存在有一子函數列$\{f_{n-n_k}\}\subset\{f_n\}$，其在$d$的度量下，在每一給定的$D$的緻密子集上爲均勻收斂的。

注意:

1. 當$A(D)$中的元素皆爲正則（holomorphic或regulan）函數時，則上面的定義是說每一$A(D)$的序列$\{f_n\}$在歐氏度量下，必存在一子序列其在每一給定的D的緻密子集上爲均勻收斂的或均勻發散至一極限函數≡∞。
2. 注意到性質$P2$就可瞭解函數族$A(D)\subset F(D)$的正規性與要求對$A(D)$所有的元素滿足在D的每一個緻密子集上爲等度連續等價的。
3. 注意對具有充分平滑性的函數族（特別亞純函數在弦距d的度量下）等度連續與球面導數在局部爲有界是等價的。

以下我們爲使讀者容易閱讀及領會起見。我們先就正則（regular）函數族在歐氏度量下的正規性及其有關的檢驗準則及應用作一介紹，然後我們利用弦距量度將亞純函數族的正規性及其檢驗，應用等作介紹。

2.3 正則函數族的正規性及相定理

定義2.2 設$F=\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in I}$爲一函數族，其中每個函數$f_\alpha$都在$D$上爲正則的。若對$F$中任一函數序列$\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$存在一個子序列$\{f_{n-n_k}(z)\}$在D內任一緻密子集上均勻收斂于一個極限函數$g(z)$或均勻趨于無窮（即極限函數$g(z)\equiv\infty$）則稱F在D內爲正規的。

本節中除特別聲明外，所涉及的函數族爲正則函數族。

定義2.3（函數族在一個點的正規性）設z_0爲D內的一點，如果存在屬於D內的圓$K:|z-z_0|<r$使函數族F在K爲正規則稱點z_0是F的一正規點。易見的是若F在D爲正規的，則在D內每一點也是正規的。

附註 對區域D內的一個函數簇$A(D)$，若對任意給定的正數ε總存在一相應的正數δ(ε)，當D內任意兩點z_1、z_2及$A(D)$中任一函數f，只要$|z_1-z_2|<\delta$，就有$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$。

以下我們舉一些正規及非正規的函數族

例 2.1 設函數族$F=z^n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$則F在圓：$|z|<1$（即單位圓）內是正規的。

因易見對任意$r<1$，z^n在$z\leqq r$上均勻收斂于0。而任一單位圓的緻密子集必包含在半徑小於1，及圓心在原點的圓內。

注意: 同一函數族在區域$1<|z|<\infty$中也是正規的。因任一此區域的緻密子集必包含在某個$R>r>1$的圓環：$r\leqq|z|\leqq R$內。而易見此函數族在此環中均勻發散趨於∞。

例 2.2 設$F=z^n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ D爲一包含單位圓周上點的區域，則F爲非正規的。

這是因F的任一子序列$\{z^n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$在單位圓上的點子z_0的任一鄰域N_{z_0}（neighber hood）中必有點z_1及z_2分別滿足$|z_1|<1$及$|z_2|>1$，因而F在N_{z_0}中不可能均勻收斂于一極限函數或均勻趨于∞。

例 2.3 設$F=\{nz\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$及$D=\{z||z|>0\}$則F在D上爲正規的，但在含原點的任何區域內不是正規的。

下面我們只述敘但不加證明的 一個有用的定理。

定理 2.1 若函數族$F=\{f_\alpha(z)\}_{\alpha\in I}$在區域$D$內每一點爲正規的，則$F$在$D$內是正規的。

現一個具體的問題是對一給定的在區域D上的函數族，$F=\{f(z)\}$，有何方法或準則來判定F在D上是正規還是非正規的呢？

我們稱一個在區域D內的函數族F爲均勻有界的是指存在一正數M，使得對任一屬於F中的函數f及D中任一點z，則

$$|f(z)|\leqq M$$

可以成立。

我們稱F在區域D內局部均勻有界是指對D內任一點z_0，存在一個屬於D的圓K：$|z-z_0|<r$使函數族在K上均勻有界。顯然F在D內均勻有界則必在D內局部有界。反之，由緻密集的有限覆蓋性質（finite covering property），可知F在D的任一緻密子集（有界閉區域）上均勻有界的。

均勻有界與等度連續是有密切關係的，可由下列二個引理得見。

引理 2.1 設$F=\{f(z)\}$爲區域D內的一個（正則）函數族，若F在D內局部均勻有界，則F在D的任一緻密子集（一有界的閉集）上爲等度連續

證

我們先證明由F中所有函數的導函數族$F'=\{f'(z)\}$在D內局部均勻有界。設z_0爲D內任意一點，由假設，存在一圓K：$|z-z_0|<r\subset D$，使得F在K內均勻有界，即存在

正數M使得對F中的任意函數f'及K中任意點子有$|f(z)|\leqq M$，於是對F'中任一函數f'，對任一屬於圓$K':|z-z_0|<\frac{1}{2}r$的任意一點z，有

$$|f'(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r/2}\frac{f(\omega)}{(\omega-z)^2}d\omega\right|$$

$$\leq\frac{2\pi r}{2\pi}\cdot\frac{4M}{r^2}=\frac{4M}{r}\cdot$$

這就表明函數族$F'=\{f'(z)\}$在D內局部均勻有界。

現設z_0為D內任一點及閉圓$K:|z-z_0|\leqq r$完全被包含於D內。由上面證明得知函數族$F'=\{f'(z)\}$。在$\bar{K}$上為均勻有界的：即存在一正數M使得對任意一個$f'(z)(\in F')$在$\bar{K}$上滿足

$$|f'(z)|\leqq M。$$

設z_1及z_2為K中任意兩個點，則

$$|f(z_2)-f(z_1)|=\left|\int_{z_1}^{z_2}f'(\omega)d\omega\right|$$

$$\leqq M|z_1-z_2|$$

從而可知，對任意的正數ε，只要取$f(\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{M}$，則

當$|z_1-z_2|<\delta$時，對任一$f\in F$總有

$$|f(z_2)-f(z_1)|<\varepsilon$$

於是我們證得函數族$F=\{f(z)\}$在圓$K:|z-z_0|<r$內為等度連續的，因z_0為D中任一點，於是根據有限覆蓋原理，即可推知函數族F在D內任一緻密子集中為等度連續的。

引理 2.2（Ascoli-Arzera），設$\{f_n(z)\}$為定義在有界區域D上的函數列（注意，不一定要求為正規的），如果$\{f_n(z)\}$在D上為均勻有界且等度連續，則$\{f_n(z)\}$必含有一個在D上，為均勻收斂的子序列。

證

設$\{z_n\}$為D中有理數點（即其實部與虛部皆為有理數）的全體集合。於是可知$\{z_n\}$在D中為稠密的（dense），即每個D中的點都可由$\{z_n\}$中的點列去逼近。以下我們先將由$\{f_n(z)\}$中選出一子序列使得其在$\{z_n\}$中每點皆為收斂的。其主要依據所謂的布爾查諾——威爾斯特拉斯（Bolzano-Weierstrass）定理。即任一有界的序列，必可選出一收斂的子序列。

由於$\{f_n(z)\}$在 D 上爲均勻有界，所以特別$\{f_n(z_1)\}$爲有界的，因此z_1相應一收斂子序列$\{f_{1n}(z_1)\}$：

$z_1 \leftrightarrow f_{11}(z_1), f_{12}(z_1), \cdots\cdots$

同樣對z_2及序列$\{f_{1n}(z_2)\}$可得一收斂子序列$\{f_{2n}(z_2)\}$

$z_2 \leftrightarrow f_{21}(z_2), f_{22}(z_2), \cdots\cdots$

依此可得

，⋮

$z_m \leftrightarrow f_{m1}(z_m), f_{m2}(z_m), \cdots\cdots$

⋮

注意對$k<m$時$\{f_{mn}(z_m)\}$爲$\{f_{kn}(z_k)\}$的子序列，於是由對角線法，可知$f_{11}, f_{22}, f_{33}, \cdots\cdots$在所有點$\{z_n\}$上皆爲收斂的。

現我們進一步來證明$\{f_{nn}(z)\}$在整個D上爲均勻收斂的，首先很明顯的$\{f_{nn}(z)\}$在D上爲等度連續的，所以對任何一正數$\varepsilon>0$，存在$\delta=(\varepsilon)$使得對任何n與$z, z' \in D$但$|z-z'|<\delta$時

$$|f_{nn}(z)-f_{nn}(z')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

由於D爲有界的，所以存在N個點$z_1, z_2, \cdots z_N$設對任何$z \in D$，可有某個z_i使得$|z-z_i|<\delta$及對任何n，

$$|f_{nn}(z)-f_{nn}(z_i)|<\varepsilon/3$$

另一方面，$\{f_{nn}(z)\}$在$\{z_1, \cdots z_n \cdots\}$上爲收斂的，所以當$n \geq N_1(\varepsilon)$時，對任何非負正整數$P$，有

$$|f_{nn}(z_1)-f_{n+p\,n+p}(z_1)|<\varepsilon/3$$

$$\cdots\cdots$$

$$|f_{nn}(z_N)-f_{n+p\,n+p}(z_N)|<\varepsilon/3$$

于是對任何$z \in D$及$n \geq N_1(\varepsilon)$時，

$$|f_{nn}(z)-f_{n+p\,n+p}(z)| \leq \| f_{nn}(z)-f_{nn}(z_2)|+|f_{nn}(z_i)-f_{n+p,\,n+p}(z_i)|+|f_{nn}(z_i)-f_{n+p,\,n+p}(z)|<\varepsilon$$

這也證明了$\{f_{nn}(z)\}$在D上爲均勻收斂的了。

2.3 正規族的檢驗及相關定理

有了以上的準備，我們可以介紹及證明下面正規族的檢驗。

定理 2.2 【孟台兒（Montel）】設F爲一在區域D上的正則函數族，若F爲均勻有界，則F爲正規的。

證

由引理2.1知F在D中，任一緻密子集爲等度連續。今設A爲D上一任意緻密子集，則F在A上爲均勻有界且等度連續。於是由上引理可知任何屬於F的函數序列必含有在A上爲均勻收斂的子序列。今對D可有一序列的緻密子集A_n使得

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots\cdots \subset D \text{且} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = D$$

則對任何$\{f_n(z)\} \subset D$，存在子序列$\{f_{1n}(z)\}$在A_1爲均勻收斂，對$\{f_{1n}(z)\}$又有其子序列$\{f_{2n}(z)\}$其在A_2上爲均勻收斂，依此，可得一子序列$\{f_{nn}(z)\}$其在所有的A_m上爲均勻收斂，而任一D的緻密子集必屬於某個A_m，因而$\{f_{11}(z)\}$在D上爲一正規族。定理得證。

今接著敘述及證明一個把局部均勻有界與僅在一點列上收斂的有用關係如下：

定理 2.3 【韋塔利（Vitali）】設$\{f_n(z)\}$爲在區域D內一正則函數序列，每一f_n在D上爲局部均勻有界。如果$\{f_n(z)\}$在以$z_0 \in D$爲極限點的點列$\{z_n\}$上收斂，則$\{f_n(z)\}$在D上的任一緻密子集均勻收斂。

證

我們首先證明$\{f_n(z)\}$在D的任何一點z_0上爲收斂的，設不然，則由局部有界性，存在有兩個子序列$\{f_{1k}(z_s)\}$及$\{f_{2k}(z)\} \subset \{f_n(z)\}$使得

$$\lim_{k\to\infty} f_{1k}(z_0) = \alpha,\ \lim_{k\to\infty} f_{2k}(z_0) = \beta\text{，}\alpha \neq \beta\text{。}$$

且由引理2.1知此兩子序列$\{f_{1k}(z)\}$及$\{f_{2k}(z)\}$必爲等度連續，再由引理2.2知此兩序列必各具有一子序列在D內任一緻密子集上爲均勻收斂，設此兩子序列爲$\{f_{11n}(z)\}$及$\{f_{22n}(z)\}$，則$\lim_{n\to\infty} f_{11n}(z) = g_1(z)$及$\lim_{n\to\infty} f_{22n}(z) = g_2(z)$。則$g_1$及$g_2$在$D$上爲正則，且$g_1(z_0) = \alpha$，$g_2(z_0 = \beta$，但由定理條件知對點列$\{z_n\}$。

$g_1(z_n) = g_2(z_n)$，$n = 1,2\cdots\cdots$但$\{z_n\}$在D內有一極限點z_0，於是由一致性定理知在D上。

$g_1(z) \equiv g_2(z)$，此與$\alpha \neq \beta$不符，因而可得結論$\{f_n(z)\}$在D上每點將收斂。現證其在任一緻密子集上爲均勻收斂，若不然，則設A爲D的任一緻密子集A，而$\{f_n(z)\}$在A上不均勻收斂，則其存在一子序列$\{f_{1n}\}$及$\{z_n'\} \subset A$，$\varepsilon > 0$使得

$$|f(z_n')-f_{1n}(z_n')|\geq\varepsilon \tag{2.1}$$

其中 $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$

但由孟台兒定理（定理 2.3）知對$\{f_n(z)\}$存在有一子序列$\{f_n(z)\}$在A上爲均匀收斂，且

$\lim\limits_{n\to\infty}f_{nk}(z)=f(z)$。於是對於任何$z\in A$，

$$|f(z)-f_{nk}(z)|<\varepsilon \tag{2.2}$$

此與式(2.1)相矛盾，因此$\{f_n(z)\}$在A上爲均匀收斂，由於A爲D的任一緻密子集，因而定理得證。

由以上結果，正規族的定義以及注意我們稱一個函數列在某點集上「均匀收斂」它是指在該點集上「均匀收斂于一個函數」或「均匀趨向于∞」。

引理 2.3 設F爲在區域D上的一正規族。若F在D內一點z_0上爲有界，則F必爲內閉均匀有界。

此處所謂內閉均匀有界是指說對任一D的緻密子集，F爲均匀有界（此界當然視A而定）

證

設不然。則存在一緻密子集$A\subset D$，在A上F不爲均匀有界。即存在一序列$\{f_n(z)\}\subset F$，及點集$\{z_n\}\subset A$，使得

$$|f_n(z_n)|\geq n，n=1,2, \tag{2.3}$$

現因F在D上爲正規，所以$\{f_n(z)\}$有一子序列$\{f_{n_i}\}$在D上爲內閉均匀收斂於一函數,$f(z)$或均匀趨向于∞。但$\{f_n(z)\}$爲有界的，故不可能有$\{f_n(z)\}\to\infty$因而$\{f_{n_i}(z)\}$在A上爲均匀有界此與式(2.3)矛盾，引理因而得證

注意在定理 2.1 中我們僅敘述一個函數族F在區域D上，每一點爲正規的，則F在整個D上爲正規的，以下我們來敘述及證明此兩正規性一個充要性的結果。

引理 2.4 正則函數族F在區域D上爲正規的充要條件是F在D上每一點爲正規的。

證

條件的必要性是顯然的，以下來證其充分性

我們需證明對D內任一緻密集（有界閉集）A，F的任一序列$\{f_n(z)\}$中必有一個子序列$\{f_{n_i}(z)\}$其在A上爲均匀收斂的，因$A\subset D$故對A中任意一點z_0，在在一鄰域$N(z)$使F在$N(z)$上爲正規的。今$\{N(z)\}_{z\in A}$爲A的一個覆蓋，因此必存在有限個$N(z)$覆蓋A，用類似「對

角線方法」的步驟，得出在$\{f_n(z)\}$必存在一個子序列$\{f_{n_k}(z)\}$其在這有限個鄰域$N(z)$上爲均勻收斂，因而在整個 A 上亦然。從而仿定理 2.3 的證明，即將 D 表爲$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，其中$A_i$ $(i=1,2,\cdots)$皆爲緻密子集（有界閉集）滿足$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \cdots$及$D=\cup A_n$。（注意此種$A_n$集不難建造）譬如取$A_n=\{z \mid z\in D$，但$z$與$\partial D$。（$D$ 的邊界點集）距離$\{\le \frac{1}{n}\}$，再由對角線方法的步驟，可得$\{f_n(z)\}$的一個子序列$\{f_{nn}(z)\}$其在D的任一緻密子集A上爲均勻收斂，因而F爲正規的，這兒我們用到一事實即

D的任一緻密子集A必滿足：A與∂D的距離爲正設爲δ，則$\delta \ge \frac{1}{n}$，這時可知$A \subset A_n$。

引理 2.5 設 F 爲一正則函數族，D 爲一區域。若存在一常數k使得對所有屬 F 中的f，滿足下列條件：

$$0<k\le |f(z)|，z\in D \tag{2.4}$$

則F爲D上一正規函數族

證

對每一個$f(z)\in F$，令$g(z)=1/f(z)$

於是由式(2.4)知，相應的函數族$\{g(z)\}$在D上爲正規且均勻有界，從而得知$\{g(z)\}$爲一正規族，現設$\{f_n\}$爲 F 中任一序列，則$\{g_n(z)\}=\{1/f_n(z)\}$有一子序列$\{g_{n_i}\}$在 D 爲內閉均勻收斂（即在D中任一緻密子集上爲均勻收斂）。設$g(z)$爲$\{g_{n_i}(z)\}$的極限函數，則$g(z)$在D內爲正則。若$g(z)\equiv 0$，則相應的$\{f_{n_i}(z)\}$內閉均勻收斂于∞。若$g(z)\equiv 0$，則因$g_n(z)\neq 0$由洛希（Rouche）定理可知$g_n(z)\neq 0$。因此而知$g(z)$在D的任一緻密子集A上有正的下界$d=d(A)$。從而可知$\{f_{n_i}(z)\}$在A上均勻收斂于$1/g(z)$，引理得證。

下面我們將敘述及證明一有關正規函數族的一充要條件。

定理 2.4 【馬帝（Marty）規則】

設F爲在區域D上的一正則函數族，則F爲正規族的充要條件是對D內任一緻密子集A，存在一相應的常數$M(=M(A))$使得對任何的$f\in F$及$z\in A$，下式總成立

$$\rho(f)=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\le M \tag{2.5}$$

即F中所有的函數其球導數爲一致有界的。

證 必要性。

假設定理的條件不成立，則必存在一緻密集 A。及一序列$\{f_n(z)\}$及點列$\{z_n\}\subset A$。使得當$n\to\infty$時

$$\frac{|f_n'(z_n)|}{1+|f_n(z_n)|^2}\to\infty \tag{2.6}$$

因A_0爲有界的閉集，所以$\{z_n\}$必一子序列不妨仍設其爲$\{z_n\}$使得$z_n\to z_0\in A_0$，今取z_0的一個有界閉鄰域$\overline{N(z_0)}\subset D$。由 F 的正規性，$\{f_n(z)\}$中必有一子序列$\{f_{n_k}(z)\}$其在$\overline{N(z_0)}$上均勻收斂于$f(z)$。今有兩種情形需討論，情形 1 $f(z)\not\equiv\infty$，情形 2 $f(z)\equiv\infty$。

在情形 1 之 F，$f(z)$在$\overline{N(z_0)}$上爲正則並在$\overline{N(z_0)}$上均勻地有

$$\frac{|f_{n_k}'(z)|}{1+|f_{n_k}(z)|^2}\to\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}，(k\to\infty)。$$

易見此極限函數，$|f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$在$\overline{N(z_0)}$上爲連續及有界的此與情形 1 的假設相矛盾。

在情形 2 的情況下，我們可考慮子序列$\left\{\dfrac{1}{f_{n_k}(z)}\right\}$，則此函數列在$\overline{N(z_0)}$上均勻地收斂于 0。

注意這時有

$$\frac{|[f_{n_k}^{-1}(z)']|}{1+|f_{n_k}^{-1}(z)|^2}=\frac{|f_{n_k}'(z)|}{1+|f_{n_k}(z)|^2}$$

上式中左邊趨向于 0 而右邊依據(2.6)趨向于∞，此爲矛盾的，必要性因而得證。

充分性

我們先來看看$\rho(f)$的幾何意義。

由早先定義的弦距：

$$d(f(z_1),f(z_2))=\frac{2|f(z_1)-f(z_2)|}{[(1+|f(z_1)|^2)(1+[f(z_2)]^2)]^{1/2}}$$

可知函數f在球極平面投影之 F，其一段在平面的弧線γ在黎曼球面上的長度爲

$$\int_{r}\rho(f(z))|dz| \tag{2.7}$$

若在以z_0爲圓心半徑爲δ的閉鄰域，$\overline{N}=\overline{N(z_0,\delta)}(\subset D)$滿足$\rho(f)\le M$，則對 N 中任一點$z_1$由式(2.7)有

$$d|f(z_0),f(z_1)|\le M|z_0-z_1|$$

即

$$|f(z_1)|\le\frac{1\{(1+|f(z_1)|^2)(1+|f(z_2)|^2\}^{\frac{1}{2}}}{2}M|z_0-z_1|+|f(z_0)| \tag{2.8}$$

由上式可見若$|f(z_0)|\ge 1$，則當$|z_0-z_1|$充分小時$|f(z_1)|>k_1>0$，而若$|f(z_0)|<1$時則$|f(z_1)|<k_2$。於是由引理 2.1 及引理 2.2 知 F 爲一正規族。

注意: 特別若存在一有限正數A，使得在D上對所有F中的f，$|f'(z)|<A$，則F爲正規的！

2.4 亞純函數族的正規性及相關定理

先前我們爲了避免一個函數在其定義域（Domam of definition）中有奇異點（極點及本性奇異點），所以我們只限於對正則函數的討論，但對一個僅具極點（pole）的函數，經過球極平面投影，若點z_0爲$f(z)$的極點，它表示$f(z_0)$取値∞，在黎曼球面上相應北極點與其它處相應別的點無什麼不同，這時再由弦距的度量，函數在極點的連續性及微分性都是確定及有意義的。所以就在區域上一個形如$f(z)/g(z)$, f, g皆爲正則的亞純函數(meromorphic function)我們有下列的定義及判別准則。

定義 2.4 （亞純函數序列的收歛）。

設$\{f(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$爲區域D內的亞純函數序列。若對D及一正整數z_0，存在一個包含於D內的圓K：$|z-z_0|<r$及一正整數n_0，使序列$\{f_n(z)\}\cdot\{n\geq n_0\}$在圓$K$內全純及一致收歛或者使序列$\left\{\dfrac{1}{f_n(z)}\right\}$ $(n\geq n_0)$在圓K內全純且一致收歛。則稱亞純函數序列$\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots\}$在D內爲廣義局部一致收歛。

注意: 此亦表示$\{f_n\}$在（球）弦距之度量下，爲局部收歛之義，

例 2.4 $\{f_n(z)\}=\left\{\dfrac{1}{z_n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$在單位圓$|z|<1$內爲廣義局部一致收歛。

這是因在$|z|<1$內任一點z_0，圓K：$|z-z_0|<1-|z_0|$包含於K內，這時取$\left\{\dfrac{1}{f_n(z)}\right\}=\{z^n\}$則易見其在$K$內全純且一致收歛於0。（常數函數）

同理可知$\{f_n(z)\}=\left\{\dfrac{1}{z^n}\right\}$在區域：$|z|>1$內也是廣義局部一致收歛，但注意$\{f_n(z)\}=\left\{\dfrac{1}{z^n}\right\}$在含單位圓周上的任何區域內不是廣義局部一致收歛的！

例 2.5 函數序列$\left\{\dfrac{1}{z-n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$在平面$|z|<\infty$內是廣義局部一致收歛的。

這是易見因在平面內任一點z_0上，若$z_0\neq n$，則在z_0的一個充分小的鄰域$U(z_0)$，函數序列$\left\{\dfrac{1}{z-n}\right\}$在$U(z_0)$內爲全純且一致收歛于0，而當$z_0=n_0$時則當$n>n_0$時函數序列$\{1/(z-n)\}$，其在$z_0$的一個充分小的鄰域內爲全純的且一致收歛于0。

依據先前的討論以上的定義及例子，我們不難得到下面一結果。

定理 2.5 設$\{f_n(z)\}$ $(n=1,2\cdots\cdots)$爲區域D內一亞純函數序列，且在D內爲廣義局部一致收歛。則序列$\{f_n(z)\}$在D內的極限函數是一個亞純函數或恆爲∞。

定義 2.5 (亞純函數的正規定義)

設$F=\{f_\alpha(z)\}\alpha\in I$（指標集）爲區域$D$內的一個亞純函數族。若對$F$中的任一函數序列$\{f_n(z)\}$ $(n=1,2\cdots\cdots)$，存在一個子序列$\{f_{n_K}(z)\}$ $(K=1,2,\cdots\cdots)$其在D內爲廣義局部一致收歛，則稱亞純函數族F在D內爲正規的。

今設$\{f_n\}$爲一亞純函數序列且f_n廣義收斂于函數f_0。

由廣義收斂的定義及當$f(z_0)=\infty$時，我們可有一個圓K：$|z-z_0|<r_0$（充分小的半徑，得$K\subset$在函數族的定義域D內），使得當$n>n_0$時$\frac{1}{f_n}$及$\frac{1}{f}$在K內爲正則的，且均勻（或一致）地滿足

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n>n_0}}\left\{\frac{1}{f_n(z)}-\frac{1}{f(z)}\right\}=0$$

由此及定理2.4及球導$f(z)$或

$$\partial(z, f)=\frac{1|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

爲z的連續函數及滿足

$$\partial(z, f)=\partial\left(z, \frac{1}{f}\right)$$

的關係，我們立即可得知，馬帝（Marty）規則（即定理2.4）對亞純函數族亦適用。同時我們也可立即得到下面一事實：

定理 2.6 設$\{f_n\}$ $(n=1,2\cdots)$爲一定義在區域D上的一亞純函數列，其廣義局部一致收斂于一亞純函數f，則$\partial(z, f_n)$在弦距之度量下，局部收斂于$\partial(z, f_n)$。今利用孟台兒（Montel）正規定則證明下面一正規定則：

定理 2.7 設$F=\{f_\alpha(z)\}$，$\alpha\in I$（I爲一指標集）爲區域D上一個全純函數族，若F中任一函數$f(z)$在D內不取兩個（固定但判別的）有限値a和b。則F在D內爲正規的。

爲了證明此定理，我們需引用下面一個引理（可參看任何一本古典的解析函數論的書）

引理 2.6 （蕭基（Schottky）不等式），設$f(z)$在$|z|<R$內全純且不取0和1兩個値。則當$0<r<R$時，

$$\log M(r, f)<\frac{cR}{R-2}\left\{\log+|f(0)|+\log\frac{2R}{R-r}\right\}$$

其中c爲一絕對常數（與f無關）

今來證明定理2.7，設z_0爲D內任一點，我們將證明函數族F在z_0爲正規的。

設圓K：$|z-z_0|<r$，爲包含在D內一個圓及$\{f_n(z)\}$爲F中任一函數序列，若序列$\{f_n(z_0)\}$爲有界的，即

$$|f_n(z_0)|\leq M, (n=1,2,\cdots\cdots)$$

則依據上引理，當$|z-z_0|<r/4$時，

$$\log|f_n(z)|\leq\log+M\left(\frac{r}{r},z_0,f_n\right)\leq\frac{c,\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}-\frac{r}{4}}\left\{\log 1^+|f_n(z_0)|+\log\frac{2\cdot\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}-\frac{r}{4}}\right\}<c\{\log^+M+\log 4\}<d$$

即表示$\{f_n(z)\}$在圓$|z-z_0|<\frac{r}{4}$內爲一致有界的，因而$\{f_n(z)\}$在圓$|z-z_0|<\frac{r}{4}$內爲正規的，從而證得F在點z_0爲正規的。

現討論$\{f_n(z_0)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$爲無界時。於是可選出一子序列$\{f_{nK}(z_0)\}$ $(K=1,2\cdots)$使得

$$\lim_{K\to\infty}|f_{n_K}(z_0)|\to\infty$$

設z_1爲圓：$|z-z_0|<\frac{r}{4}$內中的任意一點，則圓：$|z-z_1|<\frac{3}{4}r$在圓K之內，於是再由引理 2.6 可得在$|z-z_1|<\frac{r}{4}$時，

$$\log|f_{n_K}(z)|\leq c\{\log+1\,f_{n_K}(z_1)+\log 4\}$$

令z_0在$|z-z_1|<\frac{r}{4}$的圓內，所以由上式可得

$$\log|f_{n_K}(z_0)|\leq c\{\log^+|f_{n_K}(z_1)|+\log 4\}\tag{2.9}$$

而z_1爲圓：$|z-z_0|<\frac{r}{4}$內中任意一點，所以上式對所有圓：$|z-z_0|<\frac{r}{4}$內的點z皆成立。但

$$\lim_{K\to\infty}|f_{n_K}(z_0)|=\infty$$

所以由式(2.9)可得知，$\{f_{n_K}(z)\}$在$|z-z_0|<\frac{r}{4}$內一致，趨向於無窮大，從而F在點z_0亦爲正規的。

今我們用正規函數論來證明二個著名的大及小匹卡（Picard）定理在此之前我們先介紹下面二個引理。

引理 2.7 設F爲區域D上的一正則函數的正規族。設E爲D內一有界非空閉點集（緻密集）及M爲一正數。假設對F中的任一元素f，下面不等式成立：

$$\min_{z\in E}|f(z)|\leq M\tag{2.9}$$

則F在D內爲內閉均勻有界（即任何D中的一緻密集上，F爲均勻有界的）。

證

設E_1爲D內任一緻密子集，但F在其上非爲均勻有界的，則對任何正整數n，我們

可有一函數$f_n \in F$，使得

$$\max_{z\in E_1}|f(z)|>n \tag{2.10}$$

今考慮函數序列$\{f_n(z)\}$，則由(2.9)及(2.10)易見不可能有$\{f_n(z)\}$的子序列，其局部地均勻收斂于一個正則函數成∞。此與假設沒F爲正規族不符，定理因而得證。

引理 2.8 設$f(z)$爲一非常數整函數，則函數族$\{f_n(z)\}$，$f_n(z)=f(2^n z)$，$n=1,2,\cdots$在圓$|z|<2$內爲非正規的。

證

若不然，即假設$\{f_n(z)\}$在$|z|<2$內爲正規的。於是由$f_n(0)=f(0)$, $n=1,2,\cdots$及前引理，可知函數族$\{f_n(z)\}$在$|z|\le 1$上爲均勻有界的；即存在一有限正數M使得對$n=1,2,\cdots$

$$|f_n(z)|\le M$$

而這亦表示對$|z|\le 2^n$, $n=1,2,\cdots\cdots$

$$|f(z)|\le M$$

於是$f(z)$在整個複平面C上爲有界的，因而依據利胡韋（Liouville）定理，$f(z)$爲一常數此爲矛盾。引理因而得證。

註: 不難見此結果對f爲亞純函數亦眞！

由定理 2.7 及上引理我們可得下面的結果

定理 2.8 【小匹卡定理】，設$f(z)$爲一非常數正則函數，則$f(z)$必取每個有限值但至多有一個例外。

證

因若不然，f不取兩個值，（不妨設爲 0, 1）。則依據定理 2.7，函數族$f_n(z)=f(2^n z)$，$n=1,2\cdots$在圓$|z|<2$內爲正規的，此與引理 2.8 不符。定理因而得證。

在敘述及證明大匹卡定理前我們先述及及證明下面一結果。

引理 2.9 設$f(z)$在區域$D:0<|z|<\rho$中爲正則的，及$z=0$爲$f(z)$的一本性奇異點（essential Singularity）。設r爲一滿足$0<2r<\rho$的數及函數序列：

$$f_n(z)=f\left(\frac{z}{2^n}\right), n=1,2,\cdots\cdots \tag{2.11}$$

則$\{f_n(z)\}$在區域$D_1:r/4<|z|<2r$中爲非正規的。

證

若不然，即假設$\{f_n(z)\}$在D_1中爲正規的，由魏爾斯特拉斯（Weierstrass）定理（或由於0理爲$f(z)$的本性奇異點的緣故）可知存在於D內的一序列的點：

$a_m\,(m=1,2,\cdots)$使得

$$\lim_{m\to+\infty} a_m \to 0 \text{及} |f(a_m)|<1,\ m=1,2\cdots\cdots$$

我們不妨設

$$|a_m|<n/2\,(m=1,2\cdots\cdots$$

則我們有

$$\frac{r}{2^{n_k+1}} \le |a_m| < \frac{r}{2^{n_k}}，$$

其中n_K爲正整數及

$$n_K \to +\infty \tag{2.12}$$

今設

$$z_m=2^{n_m}a_m \text{則} \frac{r}{2} \le |z_m|<r \tag{2.13}$$

於是

$$f_{n_m}(z_m)=f(a_m) \text{及} |f_{n_m}(a_m)|<1 \tag{2.14}$$

現$\{f_{n_m}(z)\}$爲$\{f_n\}$的一子序列，因此在D_1中應爲正規的。由(2.12)及(2.13)及前引理 2.7 可知$\{f_{n_m}(z)\}$，$m=1,2\cdots\cdots$在圓周：$|z|=r$上爲均勻收斂的，因此由 2.11 可知存在一正數k使得在諸圓周：$|z|=r/2^{n_m}$ $(m=1,2\cdots)$上，

$$|f(z)| \le k \tag{2.15}$$

成立，再由(2.12)及極大模原理（principle of maximum modulus）可知上式(2.15)，在區域$0<|z|\le r/2^n$上成立。此與假設 f 在點$z=0$，爲本性奇異點不符，引理因而得證。

定理 2.9 【大匹卡定理，Big Picard's Theorem】設$f(z)$在區域D：$0<|z|<\rho$中爲正則的及$z=0$爲 f 的一本性奇異點。則在 D 中，$f(z)$取得，所有有限的值除了至多一個例外值外）無窮多次。

證

假設不然，即$f(z)$在D中對兩個互異的值a,b只取有限次，於是我們可找到一正數ρ_0其滿足$0<\rho_0<\rho$，使得$f(z)$在區域$D_0:0<|z|<\rho_0$中只取a,b兩個值有限次（或不取）。令n_0爲充分大的正整數使得當$n\ge n_0$時$r/2^{n-1}<\rho_0$成立，此處r爲引理 2.9 中所定。於是當$n\ge n_0$時，$f_n(z)$如引理 2.9 中所示將在區域$D_1:r/4<|z|<2r$中不取a及b，因而$\{f_n(z)\}$在D_1中爲正

規的。然而另一方面$\{f_n(z)\}$與引理 2.9 中的函數族$\{f_n(z)\}$至多有有限多個不同的函數，即$f_n(z)$，$1\le n<n_0$。從而$\{f_n(z)\}$在D_1爲正規的，此與引理2.9的結論矛盾，定理因此得證。

3. 非正則的函數族的充要條件及其應用

在先前的介紹中，我們主要是講有關正則或亞純函數族爲正規族的一些條件及應用。我們在此要介紹的是有關一個函數族在區域D上，其非爲正規時的充要條件及其應用。特別在有關函數的值分佈及代數微分方程解的增長估計，它作出了相當令人驚奇的應用及成果。這兒我們介紹的是基於查克曼（Zalcman）的結果而由潘學誠推廣的結果。

定理 3.1 設F爲在單位圓盤$\Delta(|z|<1)$中的一亞純函數族，其每一個函數在Δ中的零點的重復度大於或等於ℓ及其極點的次較大於或等於j。令α爲滿足$-\ell<\alpha<j$的一個實數。則F在Δ中的一點z_0非爲正規的充要條件是

(i) 存在一序列的點$z_K\in\Delta$，滿足$z_K\to z_0$，注意z_K可爲z_0。

(ii) 存在正數點列ρ_K，$\rho_k\to 0$，

在以上二情形下使得。

(iii) 對任一F中的函數f，在複平面C的任一緻密集上，

$$\rho_K^\alpha f_K(z_k+\rho_K\zeta)\to g(\zeta)$$

此處$\to$是表示在弦距的度量下，均勻地收斂及g爲一非常數的亞純函數。

註：此函數g可不妨假設其滿足下列的正規化條件：

$$g^\#(z)\le g^\#(0)=1\text{，}z\in C \tag{3.1}$$

註：爲方便我們以後對此定理的引用，我們在此註明：

(i) 在證明此定理前，對此定理我們舉一些實際的例子，作爲檢驗及說明可行性。不難知$F=\{(2z)^K\}$ $(K=1,2\cdots)$爲Δ中的一非正規族。這時可取$\alpha=0$，$z_K=\frac{1}{2}$及$\rho_k=a/2k$，a爲一待定的常數$\neq 0$。在這些情形下，我們有$f_K(z_K+\rho_K\zeta)=(1+a\zeta/k)^k\to e^{a\zeta}$，$\zeta\in C$。爲使$g=e^{a\zeta}$滿足正規化的條件(3.1)我們可取$a=2$。

(ii) 我們從定理 3.1 的假設看來，一般α可取滿足$-1<\alpha<1$的任何一個實數。特別在F中的函數皆爲正則，即無極點的情形下，我們可取α爲滿足$-\infty<\alpha<1$的一個值。

(iii) 由於條件(3.1)知極限函數g的球導數在整個複平面上是有界的，由此可得知g必爲有窮級（order）。這是因爲任何一個亞純函數g其級依據阿爾福斯（Ahlfors）－清水（Shimizu）的刻劃爲

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T_0(r)}{\log r}\text{，}$$

此處

$$T_0(r)=\int_0^r \frac{s(t)}{t}\,dt,$$

其中

$$s(t)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\le t}|g^{\#}(z)|^2\,dx\,dy$$

（即計重度下球面$g(\{|z|\le t\})$的正規化的面積）

因此當$g^{\#}$爲有界時，$T_0(r)=0(r^2)$即g爲一個級不大於2的亞純函數。特別爲F爲正則函數族時其極限函數g爲指數型函數（即級數不大於1的整函數）。而如何選擇定理中的三個條件使得極限函數g的球導數爲有界時在值分布及微方分程解的增長（級）的應用上發揮了其功用。

現我們回來開始對定理3.1作一概略的證明。爲簡明起見，我們證明對$\alpha=0$的情形。這時假設F在Δ中爲正規的及定理中(i)－(iii)三個情況都滿足了。這時我們可選一個數r使其滿足$|z_K|<r<1$。由馬帝規則（定理2.4）知，存在一正數M，使得

$$\max_{|z|\le(1+r)/2} f^{\#}(z)\le M,$$

其中f爲F中任一函數。

今固定一值ζ，則當k充分大時，$|z_K+\rho_K\zeta|\le(1+r)/2$，及$\rho_K f_K^{\#}(z_K+\rho_K\zeta)\le\rho_K M$。於是對所有$C$中的值$\zeta$，$g^{\#}(\zeta)=\lim\rho_K f_K^{\#}(z_K+\rho_K\zeta)=0$。由是可得結論$g$必爲一常數其可爲$\infty$。

反之，假設F在Δ中爲非正規的，則由馬帝規則可知存在一正數$r^*,0<r^*<1$。點列z_K^*（在圓$|z|\le r^*$中），及函數列$f_k\in F$使得$f_k^{\#}(z_k^*)\to\infty$。今固定r使$r^*<r<1$及令

$$M_K=\max_{|z|\le r}\left(1-\frac{|z|^2}{r^2}\right)f_k^{\#}(z) \tag{3.2}$$

$$=\left(1-\frac{|z_K|^2}{r^2}\right)f^{\#}(z_K)$$

注意$f^{\#}(z)$爲z的連續函數。由上我們立即有$M_K\ge(1-|z_K^*|2/r^2)f_K^{\#}(z_K^*)\to\infty$。這時取

$$\rho_K=(1-|z_K|^2/r^2)/M_K=\frac{1}{f_K^{\#}(z_K)}$$

則易見條件(i)及(ii)的成立。至於條件(iii)，我們不妨考慮$f_m\in F$，其滿足

$$\max_{z\in|z|\ge r^*} f_m^{\#}(z)>m$$

這時取

$$\rho_m(\zeta)=f_m(z_m+\rho_m\zeta)，$$

其中

$$\rho_m=\frac{r-|z_m|}{\lambda_m}，\lambda_m=\frac{1}{f_m^{\#}(z_m)} \tag{3.3}$$

則易見

$$\lim_{m\to\infty}\rho_m\to+\infty，及\rho^{\#}(0)=\lambda_m f_m^{\#}(z_m)=1 \tag{3.3}$$

今取一實正數列$\{R_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，使得$R_n\uparrow\infty$。在圓$|\zeta|<R_1$內取一正整數m_0使得當$m\geq m_0$時

$$\rho_m>R_1及\frac{\lambda_m}{r-|z_m|}<\frac{1}{2}$$

於是當$m\geq m_0$，函數$\varphi_m(\zeta)$爲圓：$|\zeta|<R_1$內的一亞純函數，並且在此圓內，$|z_m+\lambda_m\zeta|<r_0$ 於是，由(3.2)及(3.3)，可得

$$\begin{aligned}\varphi_m^{\#}(\zeta)&=\lambda_m f_m^{\#}(z_k+\lambda_m\zeta)\\&\leq\frac{\lambda_m M_m}{1-(|z_m+\lambda_m\zeta|/r^2)}\\&\leq\frac{r+|z_m|}{r+|z_m|+\lambda_m R_1}\cdot\frac{r-|z_m|}{r-|z_m|-\lambda_m R_1}<2\end{aligned}$$

於是由馬帝規則知$S_1=\{\varphi_m(\zeta)\}$，$m\geq m_0$在圓：$|\zeta|<R_1$內爲正規的。於是在S_1中可得出一子序列其在圓：$|\zeta|<R_1$中廣義局部收斂于函數$g_1(\zeta)$，其在$|\zeta|<R_1$中爲亞純的（也可爲一常數或∞），但由$g_1(\zeta)$不可能爲一常數。由S_1及類似的考慮我們可得到一序列函數$g_n(\zeta)$其在圓$|\zeta|<R_n$中爲非常數的亞純函數，於是我們在相應收斂于g_n的收斂函數列$\{h_{n_i}\}$中取對角線函數$\{h_{nn}\}$，則此函數列在所有的R_n，（因而在整個複平面C上），爲廣義局收斂。也即條件(iii)的證明，並注意由於(3.3)故極限函數不可能爲常數，定理因而證畢。

此定理已被用來回證許多已知的重要定理，如定理 2.7。對此方面有興趣的讀者我們推薦讀者參閱查克曼氏最近的一篇有關正規族函數的綜述性文章[6]。以下我們列舉定理 3.1 的三個應用，一爲在複微分方程亞純解的增長性方面的，一爲某種特殊形式函數的値分布的，最後是複動系統方面的。

在微分方程解的應用方面，我們先介紹一重要結果及有關的術語及記號。

定理 3.2 哥爾勃格（Goldberg)[9]任一個代數微分方程（algebraic differential）其亞純函數

解必爲有窮級。

今以f表複平面C上的一亞純函數，我們以$M_n[f]$表$(f')^{n_1}(f'')^{n_2}\cdots(f^{(m)})^{n_m}, n_1\geq 0, n_2\geq 0,\cdots$ $n_m\geq 0$，其中$n=(n_1,n_2\cdots,n_m)$並設$M_0[f]\equiv 1$。

我們以$W_n(M_n)$表$n_1+2n_2+\cdots\cdots+mn_m$並稱之爲$M_n$的權（Weight）。

一個f的微分多項式，$P[f]$是具下列形式的有限項的和：

$$P[f]=\sum_{M\in I}a_n(z,f)M_n[f],$$

其中$a_n(z,f)$表以z及f爲變數的一有理函數，I爲表一有限的指標集。

相應$P[f]$其權$\omega(P)$表之如下：

$$\omega(P)=\max_{n\in I}\omega(M_n)$$

最近伯格韋勒（Bergweiler）[2]及巴錫金（Barsegian）[3]利用不同的方法對定理 3.2 作了相類似的推廣，巴錫金是利用値分布論更深入的理論，而伯格韋勒是利用了定理 3.1 的。

定理 3.3 [2]，設f爲代數微分方程：

$$(f')^m=P[f], \quad m>\omega(P) \tag{3.3}$$

的一個亞純解，則f'必爲有窮級。

註 很明顯的，由於對一個不涉及f導數的單項次，其權爲 0，因此條件(3.3)自然滿足因此定理 3.3 爲定理 3.2 的一個推廣。

證 假設f爲無窮級則由級的定義中的$T_0(r)$可知必存在有一數列$\{a_k\}$使得當$k\to\infty$時

$$\log f^{\#}(a_k)/\log|a_k|\to+\infty$$

此表示函數族$\{f(a_k+z)\}$在$z=0$點處爲非正規的。於是由定理 3.1 不難見存在有兩個序列；$\{b_k\}$及$\{\rho_k\}$使得$|b_k-a_k|<1$及$\rho_k\to 0$及$h_k(z)=f(b_k+\rho_k z)$廣意局部收斂于一非常數函數h。注意，我們事實可取$\rho_k=\dfrac{1}{f^{\#}(b_k)}$及$f^{\#}(b_k)\leq f^{\#}(a_k)$，因而對任意大的$M$，

$$\begin{aligned}|b_K^M\rho_k|&=\frac{|b_K|^M}{f^{\#}(b_K)}\leq\frac{|b_K|^M}{f^{\#}(a_k)}\\&=\frac{|a_k|^M}{f^{\#}(a_k)}\cdot\frac{|b_k|^M}{|a_K|^M}\to 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

今在微分方程$f'(z)^m=P[f](z)$中以$b_K+\rho_k z$代z，則有

$$\rho_k^{-m}h_k'(z)^m=\sum_{n\in I}a_n(b_K+\rho_K z,h_k(z)\rho_K^{-\omega(p)}M_n[h_k](z)$$

在上式中，兩邊用ρ_K^n乘之，並令$K\to\infty$，則因$m>\omega(P)$及(3.4)，故可得$h'(z)^n=0$，即$h(z)$爲一常數，此爲矛盾的，定理因而得證。

註:

(i) 事實上同樣的方法可用來討論具特殊形式的高階代數微分方程式，參看廖一楊[5]。

(ii) 當條件$m>\omega(P)$不滿足時，有反例，參看[4]

$$(f')^2=ff'''-ff''-f'f''$$

有一解爲$f=e^z$，此時$m=2<3=\omega(P)$

定理 3.4 設f爲在複平面C上的一亞純函數，則ff'必取非零之値除非f爲一常數，不難見此相當于說若$ff'(z)-1=0$在平面C中無解，則f必爲一常數。

設f爲一非常數亞純函數，且$ff'(z)\neq 1$，則我們總可找到一個點z_0使得$f^{\#}(z_0)\neq 0$，今設在單位圓Δ中，設$f_k(z)=f(z_0+k_z)/\sqrt{k}$，則明顯在$\Delta$中

$$f_K(z)f_k'(z)\neq 1$$

我們現證在Δ中，滿足$ff'(z)\neq 1$的函數族F爲正規的。假設F非爲正規的，則在定理 3.1 中取$\alpha=-\dfrac{1}{2}$及選$f_K\in F$使對$z_K\in\Delta$及$\rho_K\to+0$時有：

$$\rho_K^{-\frac{1}{2}}f_K(z_K+\rho_K\zeta)=g_K(\zeta)\to f(\zeta)$$

上式的收斂爲廣義局部性的及極限函數$g(\zeta)$爲C中一非常數的亞純函數。
從而

$$f_K'(z_k+\rho_K\zeta)f_K(z_K+\rho_K\zeta)=g_k'(\zeta)g_k(\zeta)\to g'(\zeta)g(\zeta)$$

現因$f_K'f_K\neq 1$，所以由依赫爲茲（Hurwıtz）定理，$g'g\neq 1$或$g'g^2\equiv 1$。

但若$g'g\equiv 1$則$g^2(\zeta)=z+C$。此與g爲C上亞純（單值）函數的結論相矛盾，因而在C上$g'g\neq 1$。現依定理 3.1 知g爲有限級，但依據伯克韋勒－艾勒曼可（Eremenko）已證明對非常數的有窮級亞純函數g，gg'在C上必取 1 値。此一矛盾證得$F=\{f_k\}$爲Δ中一正規族。再由馬帝規則此時存在一正數M，使得$f_K^{\#}(0)\leq M$，$k=1,2\cdots\cdots$，但由簡單計算有$f_k^{\#}(0)\geq\sqrt{k}$ $f^{\#}(z_0)$ $(\because f^{\#}(z_0)\neq 0)$故$f_k^{\#}(0)\to\infty$此與$f_K^{\#}(0)\leq M$不符，定理因而得證。

現我們介紹定理 3.1 最後的一個應用是有關複動力系統的如下。

定理 3.5 席唯克（Schwick）[8]設f爲一有理函數其次數$d\geq 2$，則其Julia集，$J(f)$爲f所有排斥週期點的閉包（closure）。

此處若我們以$f_1=f$及$f_2=fof$及$f_n=fof_{n-1}$來表示f的遞代（iteratım），一個點z_0稱爲f

的週期點，若對某個n $f_n(z_0)=z_0$成立，此點又稱爲排斥性週期點若$|f_n'(z_0)|>1$。所謂f的Julia集是指在C上對函數族$\{f_n(z)\}$爲正規的最大開域的補集。一般此最大的開域稱之爲$F=\{f_n(z)\}$的Fatou集以$F(f)$表之。因此

$$J(f)=C\backslash F(f)$$

一般可證得$J(f)$爲C上一非空的完全集（perfet set）及$J(f)=J(f_m)$，m可爲任一正整數。

現我們回到定理3.5的證明

我們不妨設一開始就有$d\geq 5$，因不然可考慮$f=f_3$開始，設 A 爲$\overline{C}(C\cup\infty)$或閉複平面上任一有限點集，其包括$\infty$及所有$f$的臨界（critical）點，（即同時滿足$f(z_0)=0$及$f'(z_0)=0$的點$z_0$的集合）。我們只需證明$f$所有的排斥性的週期點在$J(f)\backslash A$中爲稠密的就可以了。（注意$J(f)$其爲一完全集！）

取 $\alpha=0$，ω_0爲任一屬於$J(f)\backslash A$的點，此表示

$$f(z)=\omega_0 \tag{3.5}$$

在C中至少5有個單根$z_1,z_2,\cdots z_5$。

今取函數族$F=\{f_n\}$。則依據定理3.1一正整數列$\{n_K\}$，點集$z_K\to\omega_0$，$\rho_K\to+0$使得

$$f_{n_K}(z_K+\rho_K\zeta)=g_K(\zeta)\to g(\zeta),$$

此處的收歛爲廣義局部性的及極限函數g爲C上非常數的亞純函數。因此由內伐里納（Nevanlinna）第二基本定理知，g至多有4個完全分岐值（Completed ramified Value）b_1, b_2，b_3及b_4，即所有$g-b_i=0$的根的極大多數皆爲重根，這時由 3.5 知必存在有一個$\zeta_0\in C$使得$g_0(\zeta_0)=z_1$，（即z_1，z_2，$\cdots z_5$中一個不爲g的完全分岐值值，設其爲z_1）及$g'(\zeta_0)\neq 0$。

現

$$f_{n_K+1}(z_K+\rho_K\zeta)-(z_K+\rho_K\zeta)\to(fog)(\zeta)-\omega_0$$

而上式的右邊，爲一非常數函數且當$\zeta=\zeta_0$時，爲0，於是另一方面再由赫唯茲（Hurwitz）定理知當k充分大時，$f_{n_K+1}(z_K+\rho_K\zeta)=z_K+\rho_K\zeta$有解，設其爲$\zeta_K$，於是有$\zeta_K\to\zeta_0$。從而$z_K+\rho_K\zeta_K$爲$f_{n_K+1}$的一個不動點，即$f$的一個週期點及$z_K+\rho_K\zeta_K\to\omega_0$。

這時由於$\rho_K f_{n_K}'(z_K+\rho_K\zeta_K)=fog_K)'(\zeta_K)\to(fog)'(\zeta_0)=f'(g(\zeta_0))g'(\zeta_0)=f'(z_1)g'(\zeta_0)\neq 0$

所以$z_K+\rho_K\zeta_K$在k充分大時爲f的排斥性週期點。也即證明了任何$J(f)\backslash A$的一點ω_0都可找到一序列排斥性週期點向它逼近。定理因而得證。

(本文作者現任教於香港科技大學數學系)

參考文獻

1. Chi-Tai Chuang（庄圻泰）, Normal families of Meromorphic Functions, *World Scientific*, 1993.

2. Walter Bergweiler, On a theorem of Goldberg conerning meromorphic solutions of algebraic differential equations, *Complex variables, Theory and Appl*, vol.37(1998), 93-96.

3. Grigor Barsegian, On a method of study of algebraic differential equations, *BHKMS*, 2(1997), 159-164.

4. Gunter Frank and Yufei Wang, On the meromorphic Solutions of algebraic differenftal equations, *Analysis,* (18), 1998, 49-54.

5. Liang-Wen Liao and Chung-Chun Yang(廖良文-楊重駿), On the growth and factorization of entire solutions of algebraic differenfial eguations,*Ann Acad Sci Fenn Math*, vol.25 2000, 73-84.

6. Lawnence Zalcman, Normal Families; *New prospectire Bull Amer, Math.* soc. vol.35, No. 3,(1998), 215-230.

7. Joel L. Schiff, *Normal Families*, springer, 1993.

8. Wilhelm Schwick, Repelling periodic points in the Julia set, *Bull London Math Soc.*, 29(1997), 314-316.

9. A. A. Gold berg, On Single-valued solutions of first-order differential equations, ukrain, *Math. Zh.* 8 (1958), 254-261.