

# 減減法與減加法的

## 教學爭議與調和嘗試

■ 許永賢

### 一、何謂減減法？

#### 何謂減加法？

減減法與減加法是減法中比較具有代表性的二種退位減法方式。亦即二位數（十位數為一）一基數的退位減法。

「減減法」：是着眼於被減數的個位數，先分解減數為二數之和，其中一數等於被減數的個位數，先由被減數減去此數而得到 10 後，再由 10 減去另一數。例如： $15 - 8 = 15 - (5 + 3) = (15 - 5) - 3 = 10 - 3 = 7$ 。即透過「 $-5$  和  $-3$ 」的減減手續才獲得結果。

「減加法」：是把被減數分解成 10 和另一數，然後用 10 減去減數，將所得的差再加上被減數的個位數。例如： $15 - 8 = (10 + 5) - 8 = (10 - 8) + 5 = 2 + 5 = 7$  即透過「 $-8$  和  $+5$ 」的減加手續才獲得結果。

### 二、減減法與減加法教學的問題所在：

依據現行國小數學課本第二冊第七單元之教材提示，這兩種方法在本單元同時介紹，並且贊同這兩種方法。但却不表示兒童能理解這些想法，而是希望透過教師慎重的指導，先讓兒童自由思考計算方法，然後再整理這些想法，如「減減法」，「減加法」。並且強調為避免兒童思考受困擾，可以僅持用最一般化的「減加法」來教學。

然而在實際教學上並不如此單純順利，而產生種種爭議：

(一)這兩種方法同時出現，會混淆兒童思考，使兒童一時無所是從，阻礙學習的進行。

(二)這兩種方法各具特性。例如在「 $12 - 3$ 」時，若採用減減法比較方便自然；若是「 $12 - 7$ 」時，若採用減加法較為恰當。現在要同時採用於初學減法的兒童，不但增加選擇的困難和負擔，並且要無緣無故捨去減減法，硬要教師設法導入減加法，似乎有些牽強而不自然。

為要解決上述爭議，筆者認為其關鍵所在應該考慮：

(一)確認基本退位減法的課程地位，明瞭減減法與減加法在退位減法中扮演的角色。

(二)在筆算指導過程中應掌握減減法與減加法的特性。依其發展層次，由減減法的具體操作輔助導入減加法的筆算體系。

### 三、減法的教學過程與基本退位減法的課程地位

減法是數學運算裏很重要的一種計算原則。它與加法、乘法和除法等算法通稱為數學四則運算方法。有了四則運算能力，就有可能解決數學問題。因此，學習數學大多由四則計算開始學起。

(一)減法的教學過程：

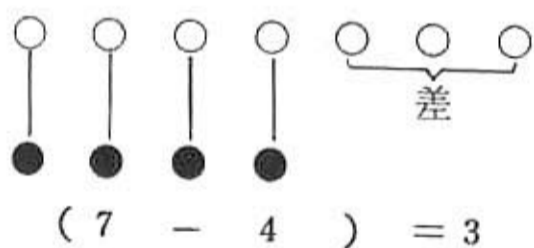
減法的教學，一般而言，需遵守下列三個發展程序。

1 具體物的操作數算階段：

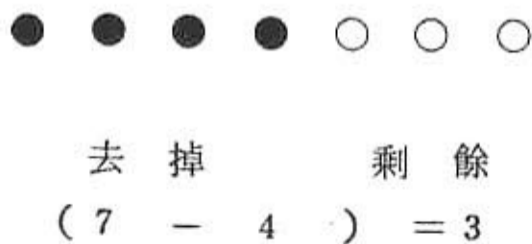
具體物的操作數算，常用於初學數學的兒童。

茲以「 $7 - 4 = 3$ 」的具體操作為例：

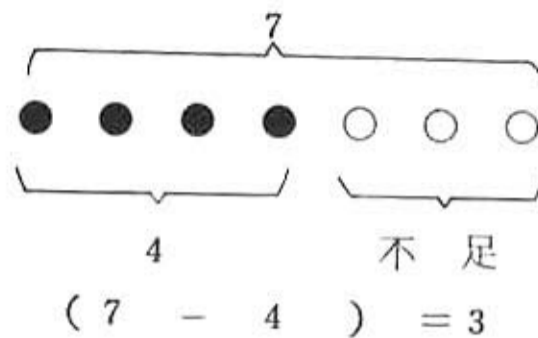
(1)透過一對一的對應，比較A、B兩組個物的多寡（求差）。



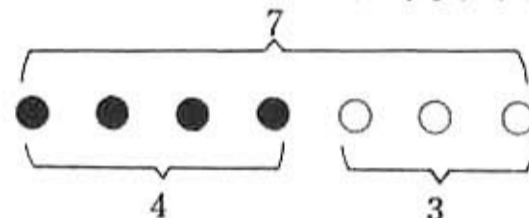
(2)或在一堆個物裏，去掉一部分而求另一部分（求剩餘）。



(3)或已知某個數，現在要求至某一定數時的不足部分（求補數）。



原本本階段兒童對於數的認識尚未脫離具體物的關係，數算個物時必仰賴具體的操作幫助瞭解減法的種種事實。然後再以「 $7 - 4 = 3$ 」的算式來統整上述不同事實的減法概念。

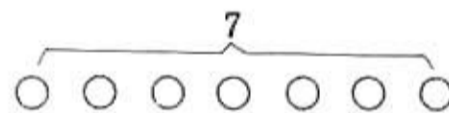


至於本階段兒童應如何進行減法教學呢！

〔問題〕：媽媽上街買了七個蘋果，吃掉四個，還剩下幾個？

〔操作〕：

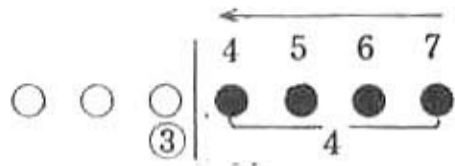
(1)利用花片（半具體物）取代蘋果，讓兒童各自在桌上排出七個花片來。



(2)現在從七個花片裏移開或取下四個花片，然後點算剩餘的個數（1, 2, 3）。

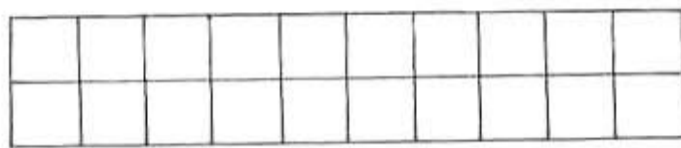


(3)有的以「逆數」法，由大而小之數序即 7, 6, 5, 4 之逆序數減 4 個，而剩下的第一個數為 3，即還剩下 3 個。



2. 半具體影像的操作數算階段：

其次，由具體物的操作階段轉換為在腦海裏作影像的數操作的階段。這種轉換過程需要以半具體物作為數的影像的操作背景。可用方瓦、積木或方格板（如圖）等作為操作工具。



（方格板）

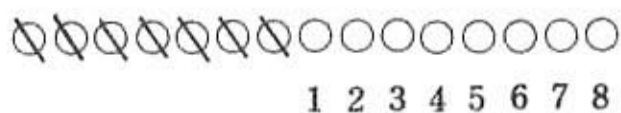
教學時可發給兒童如圖示的方格板，先利用花片（或其他小型個物）排在方格上操作，然後不用花片，讓兒童看方格，並在腦海裏作影像的操作。

減法教學應以加法的學習相關聯，並以數（10以內）的分解與合成經驗為基礎。建立減法的計算體系。

本階段應完成「基本減法」各題。基本減法共有100題可分為不退位的（即基數一基數）。與退位的（即二位數一基數的基本退位）等兩種類型。不退位的基本減法共有55題（如表一）。而退位的基本減法共有45題（如表二）。有些文獻記載，把此100題的基本減法叫做「減法九九」。

至於二位數（十位數為一）一位數，差是一位數的基本退位減法，例如  $15 - 7 = \square$ ，兒童可能有下列各種不同的想法：

(1) 數減法：一個一個去掉減數的個數，再數出剩下的個數。



(2) 添加法：由減數一個一個添加到和被減數相等的個數。即記住7，再邊唱數，邊屈指

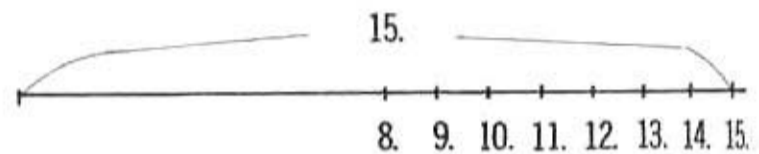
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 而得知再添加8個。

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧

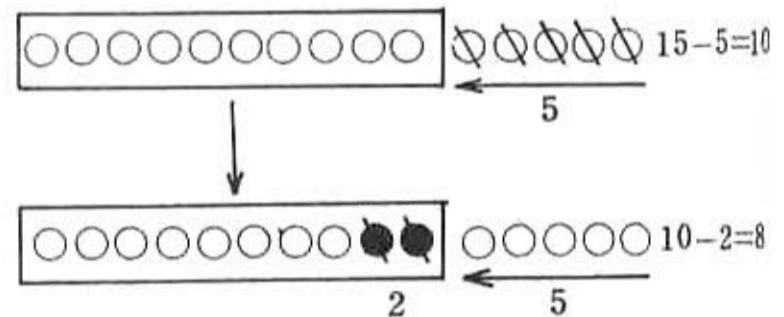
（記住⑦）8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15.

8

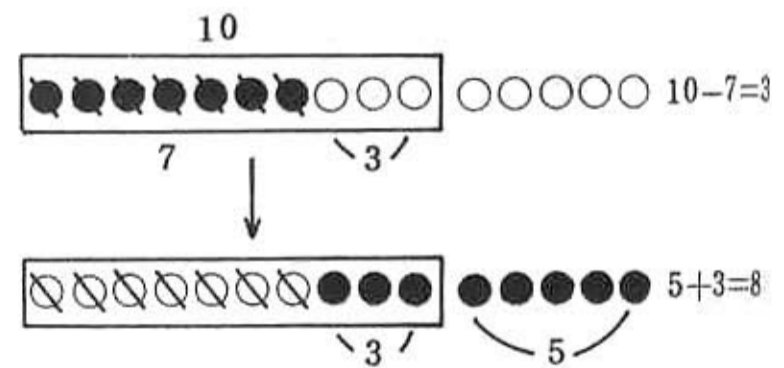
(3) 逆數法：由大而小之逆序，一個一個去掉7個，即：15, 14, 13, 12, 11, 10, 9等，下一個數就是8。



(4) 減減法：將減數分解為同被減數的個位數和另一數，然後先減去同被減數的個位數，再減去另一數。



(5) 減加法：先用被減數的10減去減數，將所得的差再加上被減數的個位數。



上述種種退位減法的操作中，以減減法和減加法比較具有代表性的減法。這兩種方法的以下列經驗作為指導的基礎；

- ① 從透過具體的操作裏瞭解減法的意義。
- ② 退位減法應以數的十進構造的理念來指導。
- ③ 對於10的分解與合成的能力，達到反

射反應的程度。

因此，減減法與減加法的指導，均應於數的十進構造為基礎，並能在腦海裏作計算為原則。

至於計算方法的指導，當然應以具體物的操作為起點，然而經久仰賴具體的操作，反而會阻礙兒童數學思考的發展。因此，要設法在適當時機，由具體的、半具體的構作階段逐次發展到數的操作階段。

在具體操作計算的階段，是以「數算」為中心。對數的性質應用並不重視，到了數的操作計算的階段，就著重於應用數的性質來指導計算。並期能早日建立計算的正確概念與方法。

由上述分析，可知減減法可視為具體操作期的延伸，而減加法即為進入數的操作階段了。

### 3. 抽象數的操作筆算階段：

本階段的減法指導，應注重熟練減法九九各題，使能達到反射反應的程度，並由具體的操作數算轉換為數的操作數算，進而指導減法的筆算形式。

本階段的減法指導，應由筆算的原理導入筆算的形式，再進而確認並練習筆算的演算過程。

茲以「 $32 - 15$ 」為例，其指導過程如下：

+	-		+	-
3	2		●●●	●●
-	1	5	●	●●●●●

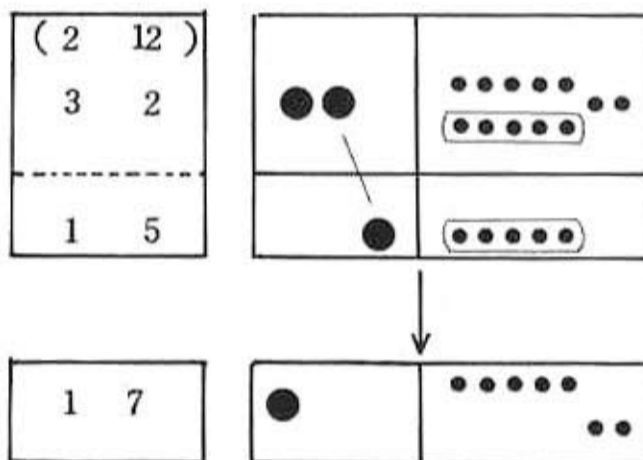
$12 \rightarrow (30 + 2)$   
 $5 \rightarrow (10 + 5)$

著眼於數的十進構造原理。

② 位值數字要對齊，確認十位數—十位數，  
 ⑤ 個位數—個位數。

( 2 . 12 )		
3 2	●●○	●●●●●●●●●●
1 5	●	●●●●●

退位減法應在腦海裏操作，必要時利用教具操作幫助瞭解退位方法。



$$\begin{array}{r}
 32 \\
 - 15 \\
 \hline
 17
 \end{array}$$

導入筆算形式。

上述筆算過程瞭解之後，若再遇到更多位數的減法。依此原理，就有可能解決。

### (二) 基本退位減法的課程地位：

基本退位減法（即減法九九）是減法裏最基本的教材，也是最基本的能力。而「減減法」與「減加法」只是幫助學習者完成學習「基本退位減法」時二種不同的運作概念。其任務在於促進學習者建立基本退位減法的計算能力。它的運算方式雖然不同。然而它們的目標却是一致的。

因此，就基本退位減法的立場而言，減減法與減加法只是完成基本退位減法的素過程，幫助學習者建立基本計算能力而已。還談不上一種方法。

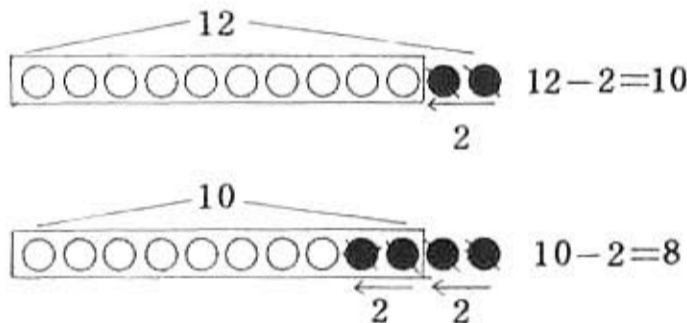
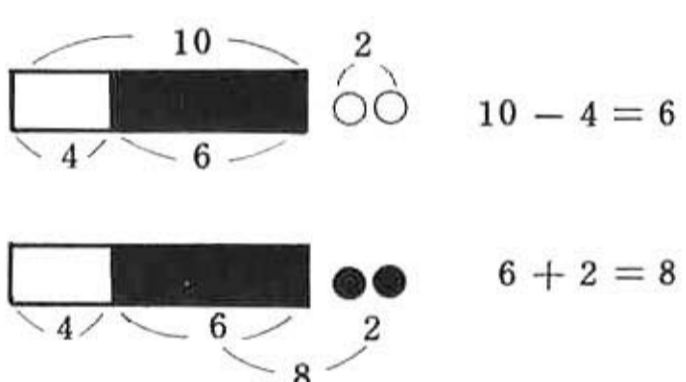
$$15 - 7 = \left\{ \begin{array}{l} 15 - (5 + 2) = (15 - 5) - 2 = 10 - 2 \\ \text{(減減法的素過程)} \\ (10 + 5) - 7 = (10 - 7) + 5 = 3 + 5 \\ \text{(減加法的素過程)} \end{array} \right\} = 8$$

目標一致

#### 四、減減法與減加法的特性

減減法與減加法的使用經常在日常生活裏出現。如飲食，通常從零餘的部分先吃先用，却很少從整塊或整瓶的先吃（當然有特殊情況  
茲舉：“12 - 4”為例，討論減減法與減加法的特性：

的另先別論），這是減減法的實用例子。致於帶錢購買東西，假若付零錢不夠時，一定要付十元或百元，千元鈔票而找回零錢的（當然特殊情形除外），這是減加法的事實，由於使用的場合與性質之不同，就選擇不同的解決方式。

減 減 法	減 加 法
<p>1 具體操作：</p>  <p>2 數式分解：分解「減數」</p> $12 - 4 = 12 - (2 + 2)$ <p style="text-align: center;">(減數)                      (分解)</p> $= (12 - 2) - 2$ <p style="text-align: center;">(減)                      (減)</p> $= 10 - 2$ $= 8$ <p>3 討論：</p> <p>(1)同為基本退位減法的素過程。</p> <p>(2)分解「減數」、固定被減數。</p> <p>(3)尚在具體操作層次，操作時比較具體自然。</p> <p>(4)長久停留在具體操作階段，有礙數學的抽象化發展。</p>	<p>1 具體操作：</p>  <p>2 數式分解：分解「被減數」</p> $12 - 4 = (10 + 2) - 4$ <p style="text-align: center;">(被減數)                      (分解)</p> $= (10 - 4) + 2$ <p style="text-align: center;">(減)                      (加)</p> $= 6 + 2$ $= 8$ <p>3 討論：</p> <p>(1)同為基本退位減法的素過程。</p> <p>(2)分解「被解數」、固定減數。</p> <p>(3)已進入數的操作階段，運用數的十進構造作運算。</p> <p>(4)由具體操作進而數的操作，有助於計算能力的發展。</p>

## 五、減減法與減加法的調和教學嘗試：

由上述各項之分析與討論，可知減減法與減加法，同為建立基本退位減法的兩種不同的素過程。然而就課程教材的發展地位而言，却不在同一層次上，現在要同時出現，並且贊同兩種方法的使用價值，又要設法只導入較能一般化的減加法途徑上。假若不小心而處理不當，當然會有困難和爭議。

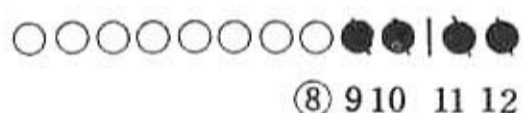
筆者認為若能依據下列步驟進行教學，可以免除困難和爭議，並且能順利而自然而養成兒童基本退位減法的能力。茲分述如下：

(一)讓兒童嘗試思考解決方法：

1 排出或畫出 12 個圈圈來，如圖示，從左邊取下或畫掉 4 個，再數出剩下的個數為 8。



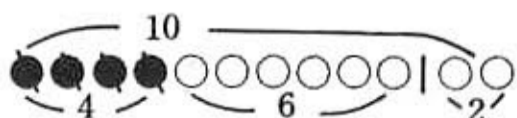
2 由大而小之逆序，一個一個去掉 4 個，下一個就是 8。



3 由 12 減 2 等於 10，再由 10 減 2 等於 8。



4 由 10 先去掉 4 個等於 6，再加上 2 等於 8。



5 直接寫出算式，採減減法解答。

$$12 - 4 = 12 - 2 - 2$$

6 直接寫出算式，採減加法方式解答。

$$12 - 4 = 10 - 4 + 2$$

7 直接反射反應為 8。

$$12 - 4 = 8$$

其他尚有不同想法，但是並不普遍，致於上述方法可歸納為兩類：

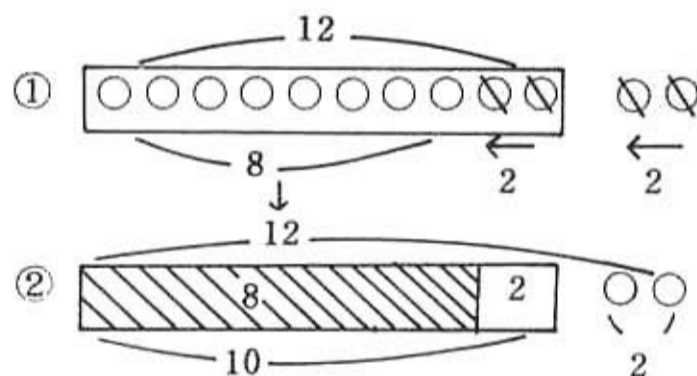
(1)透過具體物的操作解決的：如(1)至(4)題

(2)利用算式在腦海裏運算的：如(5)至(7)題

在此為取減減法與減加法為例，可選取(3)，(4)題的具體操作方式與(5)、(6)題的算式來配合並進行討論。

(二)由減減法導入減加法，並使退位減法熟練：

1 減減法由具體操作轉換為半具體的圖示：

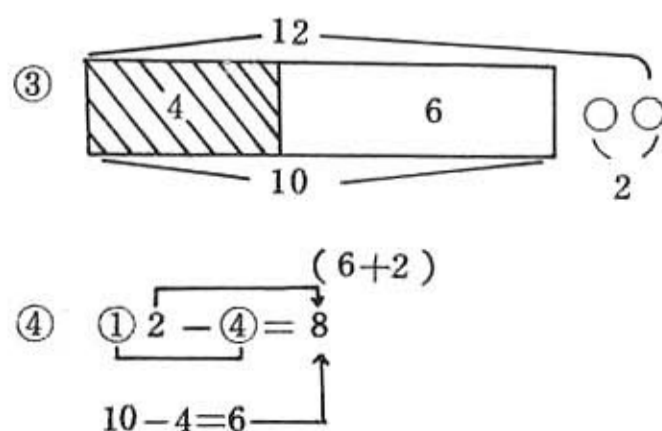


讓減減法由具體操作①轉換為半具體的圖示②。

操作具體物，先將 12 - 2 去掉 2，其次在腦海裏操作 10 - 2，並強調應用 10 的分解與合成的關係做加減的基礎。

2 減加法由半具體操作轉換為抽象數式

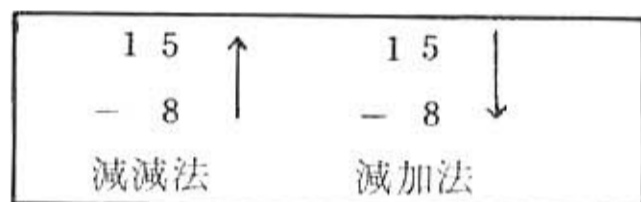
(算式)的操作：



由上題  $10 - 2$  的圖示與經驗，觀察圖示③（4 和 6 為 10）認同之後，再與數式④比較對應。再著眼於數式④ 10 的關係上，並以心算（腦海裏運算）方式算出  $10 - 4 = 6$ ，再加上 2 等於 8。了解之後再舉幾個類似問題熟練之。

3. 讓兒童體會到一開始即由 10 減去減數比較自然。

當減減法運算時，有下列幾點的困難和不自然：



①如計算  $15 - 8$  時，需分解減數 8 為 5 和 3，亦即  $8 - 5 = 3$  的操作。顯然進行減數倒減被減數的活動。

②若以具體物操作時，易流於「數算」方式。而且倒逆來減，容易忘掉  $8 - 5 = 3$  之後，還要再做  $10 - 3 = 7$  的活動。就認為「3」就是答案了。

③由上述的減法，容易誤導，減法的運算就是「大數減小數的錯誤觀念（ $8 - 5 = 3$ ， $10 - 3 = 7$ ，都是大數減小數），混亂減法的正確概念。

所以指導筆算時，採用「減加法」以固著減法的基本理念使其模式化，給予一般化。

（二）使基本退位減法的練習至反射反應的程度：

基本退位減法的指導，應以 10 的分解與合成為基礎，運用數的十進構造型質，建立減加法的筆算概念，並熟練減法九九至反射反應的程度。讓兒童看到  $12 - 4$  的算式時，能立即答出 8 來，而不再迂迴於素過程（ $12 - 4 = 10 - 4 + 2 = 8$ ）的途徑上，阻礙數學思考的正常發展。

## 一、不退位的基本減法（55 個）

（表一）

(3)										
0-0										
1-0	(2)									
	1-1									
2-0	(1)									
	2-1	2-2								
3-0	3-1	3-2	3-3							
4-0	4-1	4-2	4-3	4-4						
5-0	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5					
6-0	(4)	(8)	(5)							
	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6				
7-0	(6)	(7)								
	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6	7-7			
8-0	8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6	8-7	8-8		
9-0	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6	9-7	9-8	9-9	

（可分為八類型）

## 二、退位的基本減法（二位數（十位數為一）-基礎）（45 個）

（表二）

(6)										
10-1										
10-2	(4)									
	11-2									
10-3	11-3	12-3								
10-4	11-4	12-4	13-4							
10-5	(3)									
	11-5	12-5	13-5	14-5						
10-6	(2)	(5)								
	11-6	12-6	13-6	14-6	15-6					
10-7	11-7	12-7	13-7	14-7	15-7	(4)				
10-8	11-8	12-8	13-8	14-8	15-8	16-8	17-8			
10-9	(1)									
	11-9	12-9	13-9	14-9	15-9	16-9	17-9	18-9		

（可分為六類型）

## 參考資料

- 1 國民小學數學教學指引第二冊 國立編譯館主編印行。
- 2 算數 わかる 數之方（一年） 遠山啓著日本園土社印行。
- 3 初級小學算數事典 失野使太郎 監修、日本村佐一 旺文社印行。
- 4 學級擔任の算數指導 岡田保伊著 日本共立印刷株式會社。

（作者：彰化縣田中國小校長）